Plocha mezi grafy

Definice (plocha pod grafem a mezi grafy)

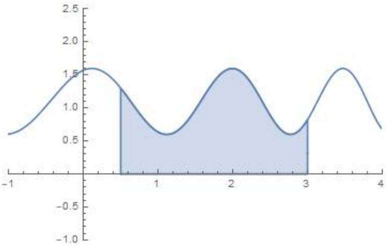
Nechť f je spojitá a nezáporná na intervalu $[a, b]$, potom definujeme plochu pod grafem f na intrervalu $[a, b]$ jako

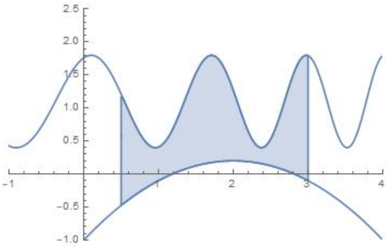
$$P(f, [a, b]) = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Podobně definujeme plochu mezi grafy spojitých funkcí f a g (na $[a, b]$) pro které platí $f \leq g$ na $[a, b]$ jako

$$P(f, g, [a, b]) = \int_a^b g(t) - f(t)\, dt.$$

Plocha mezi grafy





Plocha omezená grafy/křivkami

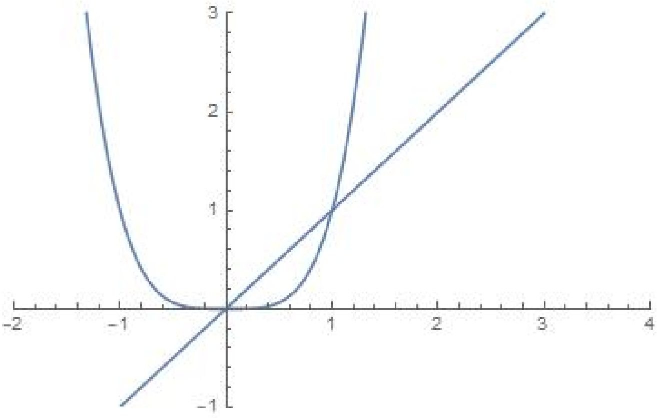
Spočítáme plochu omezenou grafy funkcí $f(x) = x$ a $g(x) = x^4$.

Plocha omezená grafy/křivkami

Spočítáme plochu omezenou grafy funkcí $f(x) = x$ a $g(x) = x^4$.Co to vůbec znamená?

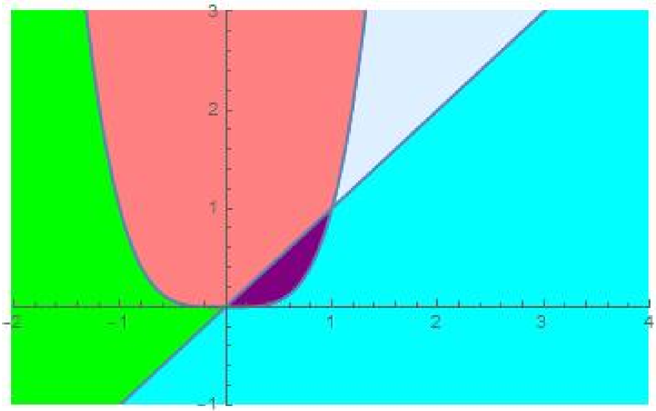
Plocha omezená grafy/křivkami

Spočítáme plochu omezenou grafy funkcí $f(x) = x$ a $g(x) = x^4$.Co to vůbec znamená?



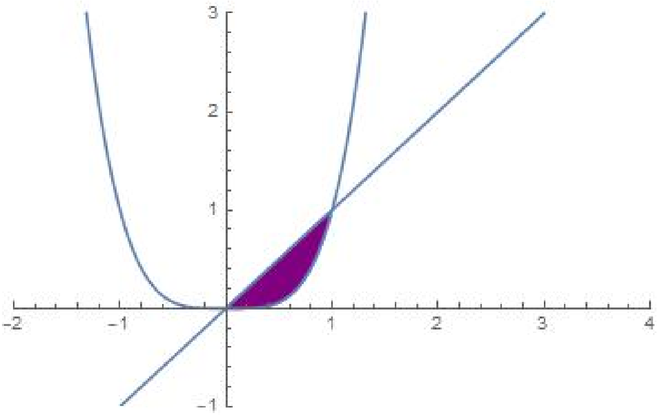
Plocha omezená grafy/křivkami

Spočítáme plochu omezenou grafy funkcí $f(x) = x$ a $g(x) = x^4$. Co to vůbec znamená?



Plocha omezená grafy/křivkami

Spočítáme plochu omezenou grafy funkcí $f(x) = x$ a $g(x) = x^4$. Co to vůbec znamená?



Plocha omezená grafy/křivkami

Spočítáme plochu omezenou grafy funkcí $f(x) = x$ a $g(x) = x^4$.

Plocha omezená grafy/křivkami

Spočítáme plochu omezenou grafy funkcí $f(x) = x$ a $g(x) = x^4$.
Hledáme řešení rovnice $x = x^4$, což je 0 a 1.
Současně snadno ověříme, že platí $x \geq x^4$ pro $x \in [0, 1]$.

Plocha omezená grafy/křivkami

Spočítáme plochu omezenou grafy funkcí $f(x) = x$ a $g(x) = x^4$.
Hledáme řešení rovnice $x = x^4$, což je 0 a 1.
Současně snadno ověříme, že platí $x \geq x^4$ pro $x \in [0, 1]$.
Zajímá nás tedy hodnota

$$P(g, f, [0,1]) = \int_0^1 f(t) - g(t)\ dt = \int_0^1 t - t^4\ dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{10}.$$

Délka křivky

Definice (délka křivky)

Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^d$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$, *je spojitá (tedy* $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ *jsou spojité). Potom definujeme délku křivky* φ *jako*

$$l(\varphi) = \sup\{L(\varphi, D) : D \in \mathcal{D}([a, b])\},$$

kde

$$L(\varphi, D) = \sum_{i=0}^{n-1} |\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)|, \quad D \in \mathcal{D}([a, b]).$$

Délka křivky

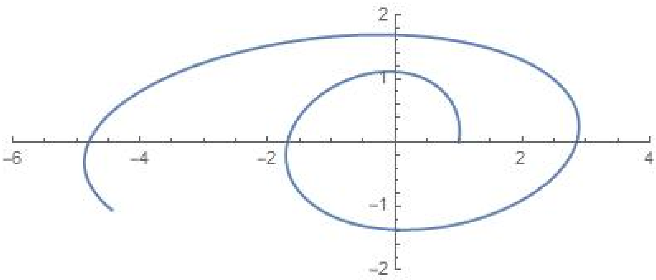
Definice (délka křivky)

Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^d$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d)$, *je spojitá (tedy* $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ *jsou spojité). Potom definujeme délku křivky* φ *jako*

$$l(\varphi) = \sup\{L(\varphi, D) : D \in \mathcal{D}([a, b])\},$$

kde

$$L(\varphi, D) = \sum_{i=0}^{n-1} |\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)|, \quad D \in \mathcal{D}([a, b]).$$



Délka křivky

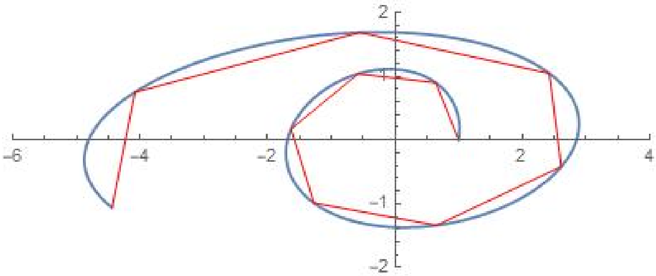
Definice (délka křivky)

Nechť $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^d$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d)$, *je spojitá (tedy* $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ *jsou spojité). Potom definujeme délku křivky* φ *jako*

$$l(\varphi) = \sup\{L(\varphi, D) : D \in \mathcal{D}([a,b])\},$$

kde

$$L(\varphi, D) = \sum_{i=0}^{n-1} |\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)|, \quad D \in \mathcal{D}([a,b]).$$



Délka křivky

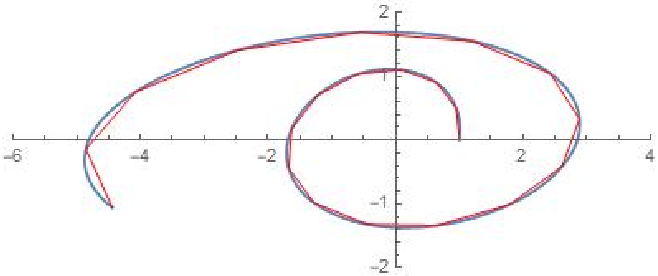
Definice (délka křivky)

Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^d$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d)$, *je spojitá (tedy* $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ *jsou spojité). Potom definujeme délku křivky* φ *jako*

$$l(\varphi) = \sup\{L(\varphi, D) : D \in \mathcal{D}([a, b])\},$$

kde

$$L(\varphi, D) = \sum_{i=0}^{n-1} |\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)|, \quad D \in \mathcal{D}([a, b]).$$



Délka křivky

Definice (délka křivky)

Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^d$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d)$, *je spojitá (tedy* $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ *jsou spojité). Potom definujeme délku křivky* φ *jako*

$$l(\varphi) = \sup\{L(\varphi, D) : D \in \mathcal{D}([a, b])\},$$

kde

$$L(\varphi, D) = \sum_{i=0}^{n-1} |\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)|, \quad D \in \mathcal{D}([a, b]).$$

Věta (výpočet délky křivky)

Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ *je taková, že všechny složky* $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ *mají spojitou derivaci na* $[a, b]$*. Potom*

$$l(\varphi) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (\varphi_i'(t))^2}\, dt$$

délka křivky - příklady

Spočítáme obvod kruhu o poloměru $R > 0$.

délka křivky - příklady

Spočítáme obvod kruhu o poloměru $R > 0$.
Přirozená parametrizace kruhu je

$$\varphi : t \mapsto (R \cos t, R \sin t) =: (\varphi_1(t), \varphi_2(t)), \ \ t \in [0, 2\pi] =: [a, b].$$

délka křivky - příklady

Spočítáme obvod kruhu o poloměru $R > 0$.
Přirozená parametrizace kruhu je

$$\varphi : t \mapsto (R\cos t, R\sin t) =: (\varphi_1(t), \varphi_2(t)),\ \ t \in [0, 2\pi] =: [a, b].$$

Máme $\varphi_1'(t) = -R\sin t$ a $\varphi_2'(t) = R\cos t$ a tedy vzorec dává

$$l(\varphi) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^d (\varphi_i'(t))^2}\ dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2}\ dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\sin^2(t) + R^2\cos^2(t)}\ dt = \int_0^{2\pi} R\ dt = 2\pi R.$$

Délka grafu funkce

Spočítáme délku grafu funkce $f(x) = \log(\cos x)$, $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$.

Délka grafu funkce

Spočítáme délku grafu funkce $f(x) = \log(\cos x)$, $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$.Přirozená parametrizace grafu funkce f na intervalu $[a, b]$ je

$$\varphi : t \mapsto (t, f(f)) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)), \quad t \in [a, b].$$

Délka grafu funkce

Spočítáme délku grafu funkce $f(x) = \log(\cos x)$, $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$.Přirozená parametrizace grafu funkce f na intervalu $[a, b]$ je

$$\varphi : t \mapsto (t, f(f)) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)), \quad t \in [a, b].$$

což dává

$$l(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt.$$

Délka grafu funkce

Spočítáme délku grafu funkce $f(x) = \log(\cos x)$, $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$.Přirozená parametrizace grafu funkce f na intervalu $[a, b]$ je

$$\varphi : t \mapsto (t, f(f)) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)), \quad t \in [a, b].$$

což dává

$$l(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt.$$

V našem případě tedy dostáváme pro délku grafu naší funkce integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + \left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}\, dx = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{6} \rightarrow t = \frac{1}{2} \end{array} \right|$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - t^2}\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 + t} + \frac{1}{1 - t}\, dt$$

Délka grafu funkce

Spočítáme délku grafu funkce $f(x) = \log(\cos x)$, $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$.
Ta odpovídá integrálu

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + \left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}\, dx = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx \\ x = 0 \to t = 0 \\ x = \frac{\pi}{6} \to t = \frac{1}{2} \end{array} \right|$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - t^2}\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\log(1+t) - \log(1-t)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\log \frac{3}{2} - \log \frac{1}{2}\right)$$

$$= \log \sqrt{3}.$$

Objem a povrch rotačního tělesa

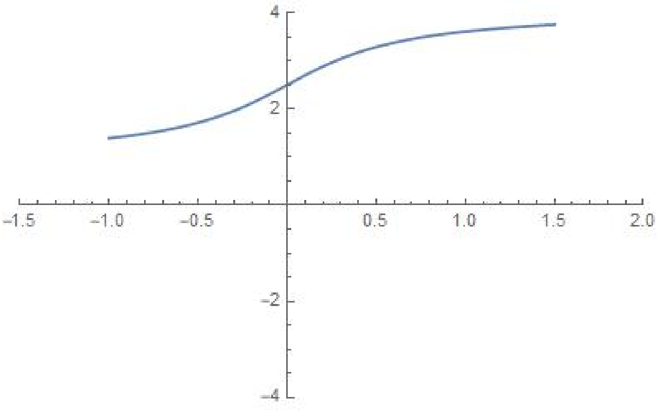
Buď $f : [a, b] \to [0, \infty)$ spojitá a definujme

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x),\ x \in [a, b]\}.$$

Objem a povrch rotačního tělesa

Buď $f : [a, b] \to [0, \infty)$ spojitá a definujme

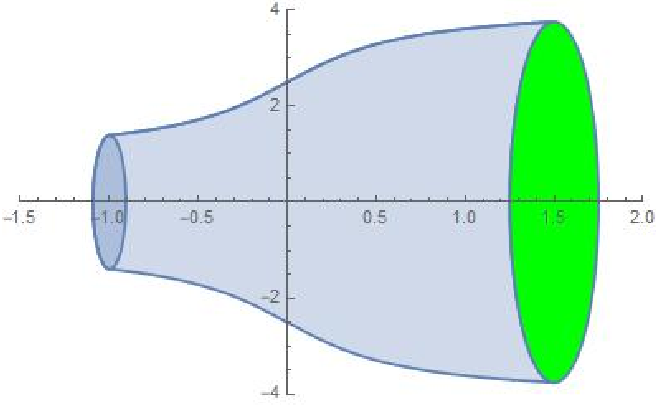
$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x),\ x \in [a, b]\}.$$



Objem a povrch rotačního tělesa

Buď $f : [a, b] \to [0, \infty)$ spojitá a definujme

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x),\ x \in [a, b]\}.$$



Objem a povrch rotačního tělesa

Buď $f : [a, b] \to [0, \infty)$ spojitá a definujme

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x),\ x \in [a, b]\}.$$

Objem a povrch rotačního tělesa

Buď $f : [a, b] \to [0, \infty)$ spojitá a definujme

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x),\ x \in [a, b]\}.$$

Potom platí:

- tzv. objem T je roven $\pi \int_a^b f(t)^2 \, dt$
- pokud je navíc f' spojitá na $[a, b]$, je tzv. povrch T roven

$$2\pi \int_a^b f(t)\sqrt{1 + (f'(t))^2} \, dt + \pi f(a)^2 + \pi f(b)^2$$

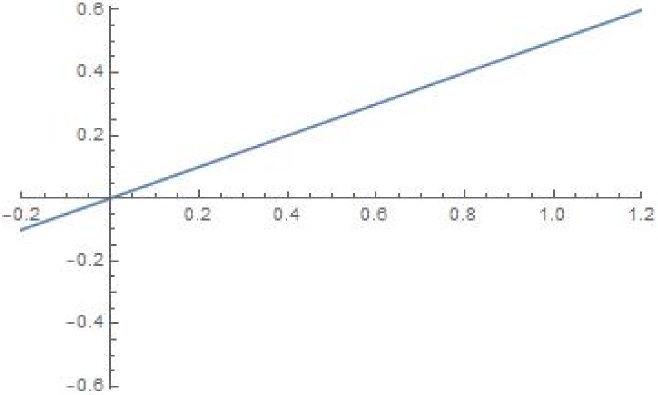
(povrch pláště + plocha dvou podstav)

Pozor, jde o podvod! Na rozdíl od délky křivky nemáme objem ani povrch definován jinak, než tzv. vzorečkem pro jeho výpočet.

Objem a povrch rotačního tělesa - příklad

Spočítáme tzv. objem a tzv. povrch kuželu o výšce V a poloměru podstavy R, tedy množiny

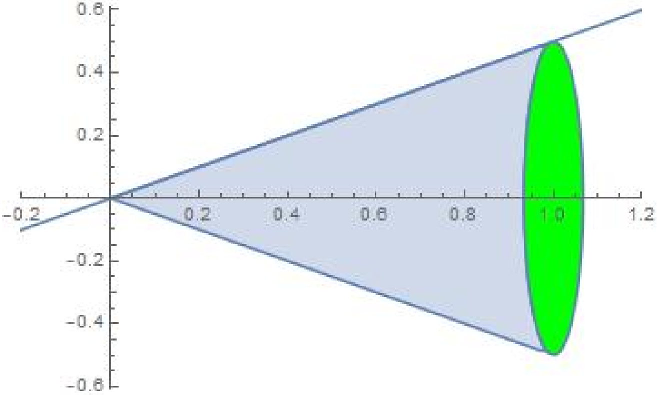
$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \sqrt{y^2+z^2}\leq \frac{R}{V}\cdot x,\ x\in[0,V]\right\}.$$



Objem a povrch rotačního tělesa - příklad

Spočítáme tzv. objem a tzv. povrch kuželu o výšce V a poloměru podstavy R, tedy množiny

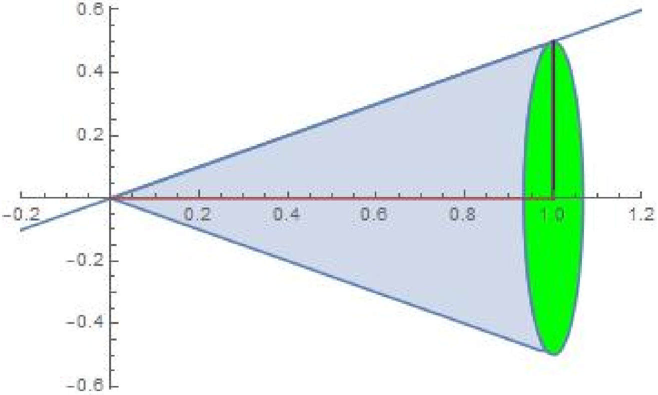
$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{y^2 + z^2} \leq \frac{R}{V} \cdot x,\ x \in [0, V]\right\}.$$



Objem a povrch rotačního tělesa - příklad

Spočítáme tzv. objem a tzv. povrch kuželu o výšce V a poloměru podstavy R, tedy množiny

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{y^2 + z^2} \leq \frac{R}{V} \cdot x,\ x \in [0, V]\right\}.$$



Objem a povrch rotačního tělesa - příklad

Spočítáme tzv. objem a tzv. povrch kuželu o výšce V a poloměru podstavy R, tedy množiny

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \sqrt{y^2+z^2}\le \frac{R}{V}\cdot x,\ x\in[0,V]\right\}.$$

Použijeme vzorec pro $f(x)=\frac{R}{V}\cdot x$. Tzv. objem je tedy roven

$$\pi\int_a^b f(t)^2\,dt = \pi\int_0^V\left(\frac{R}{V}\cdot x\right)^2\,dx = \pi\frac{R^2}{V^2}\int_0^V x^2\,dx$$
$$= \pi\frac{R^2}{V^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^V = \frac{1}{3}\pi R^2 V.$$

Objem a povrch rotačního tělesa - příklad

Spočítáme tzv. objem a tzv. povrch kuželu o výšce V a poloměru podstavy R, tedy množiny

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{y^2 + z^2} \leq \frac{R}{V} \cdot x,\ x \in [0, V]\right\}.$$

Dále platí $f'(x) = \frac{R}{V}$. Tzv. povrch je pak roven πR^2 (podstava) plus

$$\begin{aligned}
2\pi \int_a^b f(t)\sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt &= 2\pi \int_0^2 \frac{R}{V} \cdot x\sqrt{1 + \left(\frac{R}{V}\right)^2} \\
&= 2\pi \frac{R}{V^2}\sqrt{V^2 + R^2} \int_0^V x\, dx \\
&= 2\pi \frac{R}{V^2}\sqrt{V^2 + R^2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^V = \pi R\sqrt{V^2 + R^2}.
\end{aligned}$$

Celkem tedy dostáváme hodnotu $\pi R\left(R + \sqrt{V^2 + R^2}\right)$.